វិញ្ញាសាស្ទើរទី៩

១. គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានសេស, ខុសពី 1 ។

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម: $\begin{cases} xy+\sqrt{2(x^4+y^4)}=1 \\ x^{n+4}y^n+x^ny^{n+4}=\dfrac{2}{3^{n+2}} \end{cases}$

២. រកគ្រប់បណ្តាឫសជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន x, y នៃសមីការខាងក្រោម:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x+y}+2$$

៣. គេឲ្យពីរ៉ាមីតត្រីកោណ $S.ABC$ ប្រែប្រួល, មានជ្រុងខាងទាំងបី SA, SB, SC កែងគ្នាពីមួយទៅមួយ។ តាង h ជាកំពស់ពីរ៉ាមីត, S_1, S_2, S_3 ជាផ្ទៃក្រឡាបណ្តាមុខខាង។

ចូររកតំលៃធំបំផុតនៃផលធៀប: $y=\dfrac{h^2}{S_1+S_2+S_3}$

៤. គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន x, y, z ផ្ទៀងផ្ទាត់: $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $xy+yz+zx\le\dfrac{1}{2}+2xyz$ ។ សញ្ញាសមភាពកើតមានពេលណា?

៥. គេឲ្យ α ជាចំនួនវិជ្ជមានមួយ។ បង្កើតស្វ៊ីត (u_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់: $\begin{cases} u_0=\alpha \\ u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{u_n^2}, n\in\mathbb{N} \end{cases}$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា មានចំនួនវិជ្ជមានពីរ α និង A ដើម្បីឲ្យ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n^\alpha}{n}\right)=A$

៦. គេឲ្យពហុធា $f(x)$ ដឺក្រេទី 2008 ផ្ទៀងផ្ទាត់: $f(k)=\dfrac{k^3}{k^2+3k+2}$,ចំពោះ $k\in\mathbb{N}^*, k\le 2009$

គណនា $f(2010)$ ។

ចំលើយ

១. $\begin{cases} xy+\sqrt{2(x^4+y^4)}=1 & (1) \\ x^{n+4}y^n+x^ny^{n+4}=\dfrac{2}{3^{n+2}} & (2) \end{cases}$

តាម (2), យើងបំលែងបាន: $(xy)^n(x^4+y^4)=\dfrac{2}{3^{n+2}} \Rightarrow xy>0$

(n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានសេស, ផ្សេងពី 1)

ពេលនោះ, តាម (1), ដោយចំណាំថា: $2(x^4+y^4)\ge 4x^2y^2$,

ទាញបាន: $\begin{cases} 0 < xy \le \dfrac{1}{3} \\ x^4 + y^4 = \dfrac{(1-xy)^2}{2} \end{cases}$

បូករួម (1) និង (2), យើងបាន: $(xy)^n(x^4+y^4) = (xy)^{n-1}xy\dfrac{(1-xy)^2}{2}$

$$\le 2.(\frac{1}{3})^{n-1}.\left(\frac{xy+(\frac{1}{2}-\frac{xy}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{xy}{2})}{3}\right)^3 = \frac{2}{3^{n+2}}$$

សញ្ញាស្មើកើតមានលុះត្រាតែ $\begin{cases} xy = \dfrac{1}{3} \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ x = y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធដែលឲ្យមានចំលើយ: $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3};-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

២. សមីការដែលឲ្យសមមូលនឹង:

$$\sqrt{xy} = 2(1+\sqrt{x+y}) \Leftrightarrow xy = 4(1+x+y+2\sqrt{x+y})$$

ទាញបាន $\sqrt{x+y} \in \mathbb{N}^*$ ហើយ $\sqrt{xy}$ ជាចំនួនគូ

តាង $\sqrt{xy} = 2t, t \in \mathbb{N}^*$, សមីការដែលឲ្យសមមូលនឹង: $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y} = t+1 \\ \sqrt{xy} = 2t \end{cases}$

ទាញបាន $\sqrt{x},\sqrt{y}$ ជាឫសទាំងពីរនៃសមីការដឺក្រេទីពីរ:

$$z^2 - (t+1)z + 2t = 0 \quad (*)$$

$$\Delta = t^2 - 6t + 1$$

$(*)$ មានឫស $\Leftrightarrow \Delta \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \ge 3+2\sqrt{2} \\ t \le 3-2\sqrt{2} \end{array}\right.$

ដោយ $t \in \mathbb{N}^* \Rightarrow t \ge 6$ ។ ពេលនោះ, យើងងាយនឹងស្រាយបានថា:

$$(t-5)^2 \le \Delta < (t-3)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta = (t-5)^2 \\ \Delta = (t-4)^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 6 \\ t = \dfrac{15}{2} \notin \mathbb{N}^* \end{array}\right.$$

ចំពោះ $t = 6$, ទាញបាន $z = 3$ រឺ $z = 4$, ដូចនោះ $(x;y) = (9;16)$ និង $(x;y) = (16;9)$ ជាឫសទាំងពីរដែលត្រូវរក នៃសមីការដែលឲ្យ។

៣. តាង SH ជាកំពស់របស់ពីរ៉ាមីត $SABC$ $(H \in ABC))$; CH កាត់ AB ត្រង់ I

ពិនិត្យត្រីកោណកែង SIC និងត្រីកោណកែង SAB យើងបាន:

$$\frac{1}{SH^2}=\frac{1}{SI^2}+\frac{1}{SC^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{SB^2}+\frac{1}{SC^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{SB^2}+\frac{1}{SC^2}$$

តាង $S_1 =$ ក្រឡាផ្ទៃ $(SAB)=\frac{1}{2}SA.SB$; $S_2 =$ ក្រឡាផ្ទៃ $(SBC)=\frac{1}{2}SB.SC$;

$S_3 =$ ក្រឡាផ្ទៃ $(SAC)=\frac{1}{2}SA.SC$

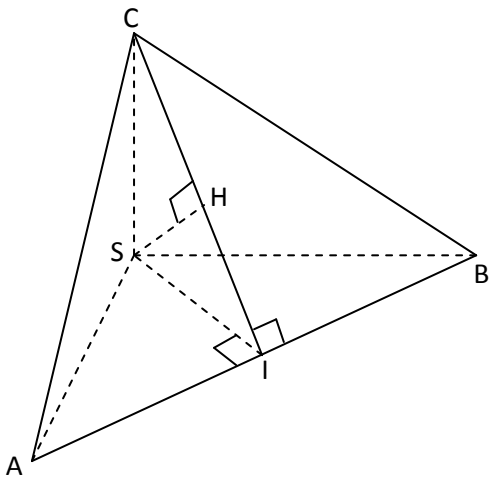
ពេលនោះ $y=\dfrac{h^2}{S_1+S_2+S_3}=\dfrac{1}{\frac{1}{h^2}}\cdot\dfrac{1}{S_1+S_2+S_3}$

$$=\frac{1}{\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{SB^2}+\frac{1}{SC^2}}\cdot\frac{2}{SA.SB+SB.SC+SC.SA} \qquad (1)$$

តាមវិសមភាពCauchy យើងបាន:

$$\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{SB^2}+\frac{1}{SC^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{SA^2}\cdot\frac{1}{SB^2}\cdot\frac{1}{SC^2}} \qquad (2)$$

$$SA.SB+SB.SC+SC.SA\geq 3\sqrt[3]{SA^2.SB^2.SC^2} \qquad (3)$$



តាម $(1),(2),(3)$ ទាញបាន: $y\leq\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\frac{1}{SA^2}\cdot\frac{1}{SB^2}\cdot\frac{1}{SC^2}}}\cdot\dfrac{2}{3\sqrt[3]{SA^2.SB^2.SC^2}}=\dfrac{2}{9}$

សមភាពកើតមាន $\Leftrightarrow SA=SB=SC$

ដូចនេះ តំលៃធំបំផុតនៃ y គឺ: $y_{\min}=\dfrac{2}{9}$

៤. យើងមានការសង្កេតដូចខាងក្រោម:

មានពីរចំនួន ក្នុងចំនោមបីចំនួន x, y, z មានលក្ខណៈ ធំជាង រឺស្មើ $\frac{1}{2}$ ព្រមគ្នា, រឺ តូចជាងរឺស្មើ $\frac{1}{2}$ ព្រមគ្នា, ឧបមាថាពីរចំនួននោះគឺ x, y

ពេលនោះ, យើងបាន $(2x-1)(2y-1) \geq 0 \Rightarrow x+y-2xy \leq \frac{1}{2}$

ម្យ៉ាងទៀត តាមសមភាពក្នុងបំរាប់ យើងបាន:

$$0 < x, y < 1 \Rightarrow x^2 < x; y^2 < y \Rightarrow x+y-2xy > x^2+y^2-2xy \geq 0$$

ដូចនេះ $0 < x+y-2xy \leq \frac{1}{2}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត:

$$1 = (x^2+y^2)+z^2+2xyz \geq 2xy+z^2+2xyz \Rightarrow 1-z^2 \geq 2xy(1+z)$$

$\Rightarrow$ $1-z \geq 2xy \Rightarrow 1-2xy \geq z > 0$ (2)

តាម (1) និង (2), យើងបាន:

$$z(x+y-2xy) \leq \frac{1}{2}(1-2xy) \Leftrightarrow xy+yz+zx \leq \frac{1}{2}+2xyz \text{ (បញ្ហាត្រូវស្រាយបញ្ជាក់)}$$

សញ្ញាស្មើកើតមានលុះត្រាតែ: $x = y = z = \frac{1}{2}$

៥. យើញថាតាមបំរាប់ យើងបាន: $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

យើងមាន: $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2} \Leftrightarrow u_{n+1}^3 = u_n^3 + 3 + \frac{3}{u_n^3} + \frac{1}{u_n^6}$ (1)

$\Rightarrow$ $u_{n+1}^3 > u_n^3 + 3 \Rightarrow u_n^3 > u_0^3 + 3n$ (2)

តាម (1) និង (2) យើងបាន:

$$u_{n+1}^3 < u_n^3 + 3 + \frac{3}{u_0^3+3n} + \frac{1}{(u_0^3+3n)^2}$$

$$\Rightarrow u_{n+1}^3 < u_n^3 + 3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{9n^2}$$

$$\Rightarrow u_n^3 < u_1^3 + 3(n-1) + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} + \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2} \quad (3)$$

ដោយ $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2} < 1 + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i(i+1)} = 2 - \frac{1}{n} < 2$ និង $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} < \sqrt{n}.\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}} < \sqrt{2n}$

ដូចនោះតាម (3) យើងបាន: $u_n^3 < u_1^3 + 3(n-1) + \sqrt{2n} + \frac{2}{9}$ (4)

តាម (2) និង (4) ទាញបាន: $u_0^3 + 3n < u_n^3 < u_1^3 + 3(n-1) + \sqrt{2n} + \frac{2}{9}$

$$\Leftrightarrow \frac{u_0^3}{n}+3<\frac{u_n^3}{n}<\frac{u_1^3}{n}+\frac{3(n-1)}{n}+\frac{\sqrt{2n}}{n}+\frac{2}{9n}$$

ឲ្យ $n\to+\infty$, យើងបាន: $3\le\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n^3}{n}\le 3\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n^3}{n}=3$

ដូចនេះ $\alpha=A=3$ ជាចំនួនវិជ្ជមានទាំងពីរដែលត្រូវរក។

៦. តាង $g(x)=(x+1)(x+2)f(x)-x^3\Rightarrow g(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី 2010

តាមបំរាប់ $f(k)=\frac{k^3}{k^2+3k+2}$, ចំពោះ $k\in\mathbb{N}^*, k\le 2009$

$\Rightarrow$ $g(x)$ មាន 2009 ឫស: $1, 2, ..., 2009$

នាំឲ្យ $g(x)=(x-1)(x-2)...(x-2009)(Ax+B)$ ចំពោះ $A\ne 0$ និង $B\ne 0$

ម្យ៉ាងទៀត: $g(-1)=1, g(-2)=-8$, នោះយើងបានប្រព័ន្ធខាងក្រោម:

$$\begin{cases}(-2)(-3)...(-2010)(-\mathrm{A}+\mathrm{B})=1\\(-3)(-4)...(-2011)(-2A+B)=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{16}{2011!}-\frac{1}{2010!}\\B=\frac{16}{2011!}-\frac{2}{2010!}\end{cases}$$

ពេលនោះ $g(2010)=2009!.(2010A+B)=2011.2012.f(2010)-2010^3$

ទាញបាន $f(2010)=\frac{2009!.(2010A+B)+2010^3}{2011.2012}$, ចំពោះ $\begin{cases}A=\frac{16}{2011!}-\frac{1}{2010!}\\B=\frac{16}{2011!}-\frac{2}{2010!}\end{cases}$